

Oscillateur harmonique et mouvement circulaire

4.1 Oscillateur harmonique

Le mouvement oscillatoire harmonique joue un rôle central en physique. Ce mouvement est un mouvement d'oscillation idéal dont la fréquence et l'amplitude d'oscillation sont constantes. Le mot **harmonique** vient du fait que les oscillations sont sinusoïdales comme dans le cas des ondes sonores. Beaucoup de mouvements en physique peuvent être considérés comme des mouvements oscillatoires harmoniques. Le mouvement d'un ressort est un mouvement oscillatoire. Les mouvements vibratoires sont des mouvements d'oscillation harmonique. Les mouvements d'oscillation autour d'une position d'équilibre peuvent aussi, en première approximation, être considérés comme des mouvement oscillatoires harmoniques. Le modèle de l'**oscillateur harmonique** est un des trois modèles qu'on sait résoudre exactement en mécanique quantique. On le retrouve aussi en cosmologie pour expliquer la formation des galaxies et autres grandes structures de l'univers. Les vibrations entre les atomes appelés des phonons peuvent aussi être modélisés par une série d'oscillateurs harmoniques. L'étude du mouvement d'un oscillateur harmonique est donc tout un programme...

Un mouvement oscillatoire harmonique mécanique est en général dû à une force élastique exercée sur un point matériel. Il faut donc commencer par introduire un modèle phénoménologique pour la force élastique. A l'aide de ce modèle, on peut définir la loi du mouvement et déterminer l'équation du mouvement par projection. En intégrant l'équation du mouvement, on trouve la solution générale du mouvement oscillatoire harmonique. On peut en déduire la pulsation, la fréquence et la période. En utilisant les conditions initiales sur la position et la vitesse, on détermine aussi l'amplitude.

4.1.1 Force élastique

Il existe deux domaines de déformations d'un solide. Le premier domaine appelé **déformation élastique** est réversible, c'est-à-dire que le solide revient à sa forme initiale après avoir été déformé. Le second domaine appelé **déformation plastique** est irréversible, c'est-à-dire que le solide ne revient pas à sa forme initiale et reste ainsi partiellement déformé.

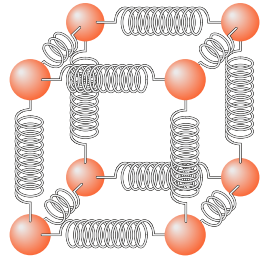
Lorsqu'on exerce une contrainte mécanique sur un ressort mou la déformation est élastique si la contrainte est suffisamment faible. Si la contrainte est plus importante, la déformation devient plastique jusqu'à une valeur critique où il y a fracture et le ressort se casse. On considère ici uniquement le domaine de déformation élastique.

Le premier modèle de force élastique est dû à Robert Hooke qui en se basant sur des résultats empiriques a énoncé une loi qui porte son nom. Dans le domaine de déformation élastique, pour des déformations suffisamment faibles, la **loi de Hooke** affirme que la force élastique $\mathbf{F}_e$ exercée sur un point matériel est proportionnelle à la déformation $\mathbf{d}$ par rapport à la position d'équilibre O et elle est orientée vers la position d'équilibre,

$$\boxed{\mathbf{F}_e = -k \mathbf{d}} \quad (4.1)$$

où k est la **constante élastique** du matériau. Hooke a écrit que cette loi signifiait que *l'allongement est proportionnel à la force*. En prenant comme origine O la position d'équilibre de la masse m , le vecteur déformation $\mathbf{d}$ du ressort coïncide avec le vecteur position $\mathbf{r}$,

$$\mathbf{d} = \mathbf{r} \quad (4.2)$$



Vibrations dans un solide (phonons)



Robert Hooke

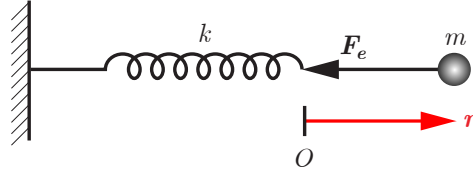
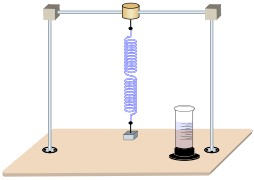


FIGURE 4.1 La force élastique $\mathbf{F}_e$ exercée sur un point matériel de masse m provoque une déformation suffisamment petite $\mathbf{d} = \mathbf{r}$ proportionnelle à la force où k est la constante élastique. Elle est orientée vers la position d'équilibre initiale O .

La force est mesurée avec un capteur de force et le déplacement avec un capteur de déplacement. Pour des déformations suffisamment faibles dans le domaine de déformation élastique, l'élongation est proportionnelle à la force appliquée. Cela démontre la loi de Hooke pour la force élastique (Fig. 4.2).



FIGURE 4.2 Vérification de la loi de Hooke dans le domaine de déformation élastique linéaire. La force élastique $\mathbf{F}_e$ et la déformation élastique $\mathbf{r}$ d'un ressort, à l'extrémité duquel est suspendu un point matériel de masse m , sont mesurées avec des capteurs.



Oscillateur (air, eau)

Intuitivement, on se rend bien compte que le mouvement oscillatoire d'une masse suspendue à un ressort est amorti par les frottements de l'air. Si on observe ce mouvement durant un intervalle de temps suffisamment court, on peut négliger la force de frottement visqueux entre la masse et l'air. Lorsque ce mouvement a lieu dans l'eau, on doit tenir compte des frottements visqueux car l'eau a une viscosité bien plus élevée. Dans cette section, on considère un oscillateur harmonique libre, c'est-à-dire qu'on néglige l'action de la force de frottement visqueux. On tiendra explicitement compte des frottements dans la section suivante.

4.1.2 Loi du mouvement harmonique oscillatoire

A l'aide l'expression (2.32) de la 2^e loi de Newton et de l'expression (4.1) de la loi de Hooke, on est à présent en mesure d'établir la loi dynamique du mouvement harmonique oscillatoire en absence de frottement. On considère un point matériel de masse m suffisamment faible pour pouvoir négliger son poids $\mathbf{P}$ par rapport à la force élastique $\mathbf{F}_e$, c'est-à-dire $\mathbf{P} \ll \mathbf{F}_e$. La seule force extérieure $\mathbf{F}^{\text{ext}}$ est la force élastique $\mathbf{F}_e$ exercée sur l'objet. Par conséquent, la loi du mouvement mouvement harmonique oscillatoire (2.32) s'écrit,

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{F}_e = m \mathbf{a} \quad (4.3)$$

En substituant l'expression (4.1) de la loi de Hooke dans l'équation du mouvement, on obtient,

$$m \mathbf{a} = -k \mathbf{r} \quad (4.4)$$

Comme la force élastique $\mathbf{F}_e = -k \mathbf{r}$ est une force centrale orientée vers le point d'attache du ressort, le mouvement a lieu dans un plan. Dans le cas où la vitesse initiale est nulle ou orientée selon l'axe défini par le point d'attache du ressort et le point matériel, le mouvement harmonique oscillatoire est rectiligne.

4.1.3 Equation du mouvement harmonique oscillatoire

On considère ici uniquement des mouvements harmoniques oscillatoires rectilignes. On choisit l'axe Ox qui relie le point d'attache du ressort et le point matériel et qui est orienté positivement dans la direction du point matériel de masse m . La position s'écrit $\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}}$ et l'accélération est donnée par $\mathbf{a} = \ddot{x} \hat{\mathbf{x}}$. En projetant la loi vectorielle du mouvement oscillatoire harmonique (4.4) selon l'axe Ox , on obtient l'équation du mouvement harmonique oscillatoire rectiligne,

$$\text{selon } \hat{\mathbf{x}} : m \ddot{x} = -kx \quad (4.5)$$

La **pulsation** de ce mouvement oscillatoire harmonique en absence de frottement est définie comme,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.6)$$

L'équation différentielle du 2^e ordre du mouvement harmonique oscillatoire (4.5) peut être mise sous la forme,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{x} = -\omega^2 x \quad (4.7)$$

L'équation différentielle du 1^{er} correspondante s'écrit,

$$\dot{x} = \sqrt{-\omega^2} x \quad \text{ainsi} \quad \ddot{x} = \sqrt{-\omega^2} \dot{x} = -\omega^2 x \quad (4.8)$$

L'équation (4.8) admet les solutions mathématiques suivantes,

$$x(t) = e^{\sqrt{-\omega^2}t} = e^{\pm i\omega t} \quad (4.9)$$

où $x(t) \in \mathbb{C}$. Les solutions complexes conjuguées (4.9) sont de module unité,

$$|e^{\pm i\omega t}|^2 = e^{\pm i\omega t} e^{\mp i\omega t} = e^{\pm i(\omega - \omega)t} = e^0 = 1 \quad (4.10)$$

A l'aide de la formule d'Euler, les solutions mathématiques (4.9) se décomposent en partie réelle et imaginaire comme,

$$x(t) = e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t) \quad (4.11)$$

Cette formule peut être établie en faisant de la trigonométrie sur le cercle de rayon unité dans le plan complexe de Gauss (Fig. 4.3) dont les axes sont $\text{Re}(x(t))$ et $\text{Im}(x(t))$. Dans le

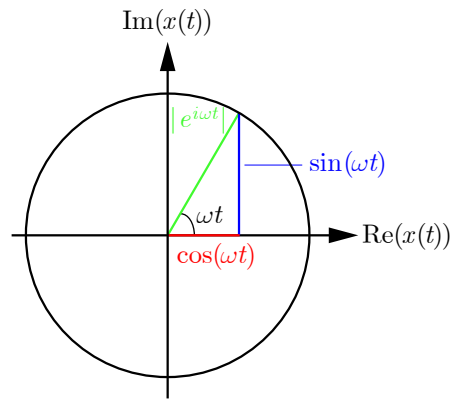


FIGURE 4.3 Le cercle trigonométrique de rayon unité dans le plan complexe, aussi appelé le plan de Gauss, est le lieu géométrique des solutions $|e^{i\omega t}|$. La projection de $|e^{i\omega t}|$ sur l'axe réel $\text{Re}(x(t))$ donne $\cos(\omega t)$ et la projection sur l'axe imaginaire $\text{Im}(x(t))$ donne $\sin(\omega t)$.

cas particulier d'une demi période où $\omega t = \pi$, la formule d'Euler (4.11) donne la plus belle équation des mathématiques,

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \quad (4.12)$$



Leonhard Euler

De plus, la formule de Pythagore appliquée au cercle trigonométrique dans le plan de Gauss donne l'identité trigonométrique,

$$\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1 \quad (4.13)$$

Ces solutions mathématiques (4.11) sont **complexes**, c'est-à-dire $x(t) \in \mathbb{C}$, mais l'amplitude d'oscillation est **réelle**, c'est-à-dire $x(t) \in \mathbb{R}$. Les solutions physiques de l'équation mouvement harmonique oscillatoire (4.4) sont donc des combinaisons linéaires réelles des solutions mathématiques linéairement indépendantes (4.11) avec une pulsation positive ω et une pulsation négative $-\omega$. Il y a donc deux types de solutions physiques linéairement indépendantes,

$$(i) \quad x(t) = \cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \quad (ii) \quad x(t) = \sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \quad (4.14)$$

Si une équation différentielle admet des solutions linéairement indépendantes, la solution générale est une combinaison linéaire de ces deux solutions,

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (4.15)$$

où A et B sont des longueurs constantes qui dépendent des conditions initiales. En introduisant le changement de variable suivant,

$$A = C \cos \varphi \quad \text{et} \quad B = -C \sin \varphi \quad (4.16)$$

où $C \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in [0, 2\pi)$, la solution générale (4.15) peut être exprimée comme,

$$x(t) = C \left(\cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi \right) \quad (4.17)$$

En utilisant la formule de trigonométrie,

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi \quad (4.18)$$

la solution générale (4.17) se réduit à (Fig. 4.4),

$$x(t) = C \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.19)$$

où φ est l'angle de **déphasage** et C est l'**amplitude** d'oscillation, qui dépendent des conditions initiales.

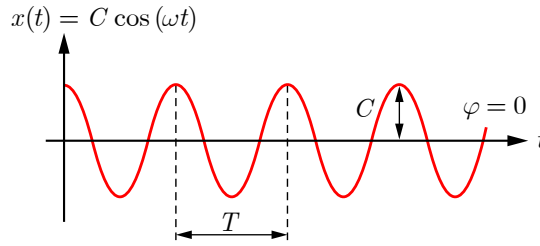


FIGURE 4.4 Solution du mouvement oscillatoire sans frottement $x(t) = C \cos(\omega t)$ d'amplitude C , de pulsation ω , de période T et d'angle de déphasage $\varphi = 0$.

Une période d'oscillation T correspond à un angle de 2π dans le plan de Gauss,

$$\omega T = 2\pi \quad \text{ainsi} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (4.20)$$

L'amplitude C correspond à la longueur de déformation maximale de l'équation horaire (4.19). Le déphasage φ correspond à un angle de translation de l'équation horaire (4.19). La fréquence f d'oscillation est l'inverse de la période,

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{ainsi} \quad \omega = 2\pi f \quad (4.21)$$

L'unité physique de la période d'oscillation T dans le système international d'unités est la seconde notée [s]. L'unité physique de la fréquence d'oscillation et de la pulsation est le Hertz noté [Hz] = [s⁻¹].

L'équation horaire (4.19) permet une identification plus claire des grandeurs physiques

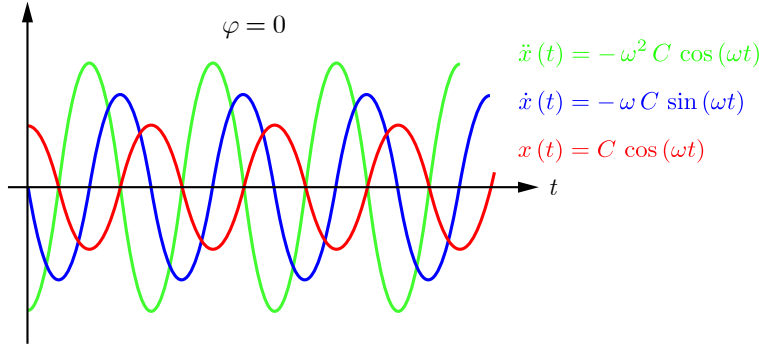


FIGURE 4.5 Graphique de la position $x(t)$, de la vitesse $\dot{x}(t)$ et de l'accélération $\ddot{x}(t)$ d'un mouvement harmonique oscillatoire pour un angle de déphasage $\varphi = 0$. La vitesse est déphasée d'un angle $\pi/2$ par rapport à la position et l'accélération est déphasée d'un angle π par rapport à la position.

caractérisant le mouvement oscillatoire harmonique que l'équation (4.15). L'équation de la vitesse est obtenue en dérivant l'équation horaire (4.19) par rapport au temps t (Fig. 4.5),

$$\dot{x}(t) = -\omega C \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.22)$$

L'équation du mouvement est obtenue en dérivant l'équation de la vitesse (4.22) par rapport au temps t (Fig. 4.5),

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 C \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t) \quad (4.23)$$

En prenant un autre angle de déphasage φ' déphasé d'un quart de période par rapport l'angle de déphasage φ ,

$$\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2} \quad (4.24)$$

l'équation horaire (4.19) d'un mouvement harmonique oscillatoire peut alors être exprimée explicitement en fonction de la fonction sinus (Fig. 4.6),

$$x(t) = C \sin(\omega t + \varphi') \quad (4.25)$$

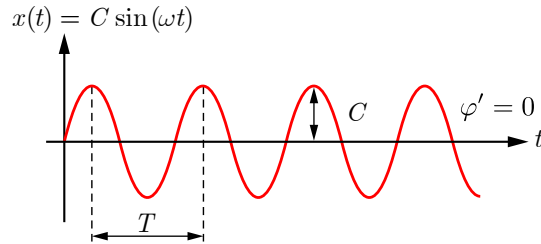


FIGURE 4.6 Solution du mouvement oscillatoire sans frottement $x(t) = C \sin(\omega t)$ d'amplitude C , de pulsation ω , de période T et d'angle de déphasage $\varphi' = 0$.

L'équation de la vitesse est obtenue en dérivant l'équation horaire (4.25) par rapport au temps t ,

$$\dot{x}(t) = \omega C \cos(\omega t + \varphi') \quad (4.26)$$

L'équation du mouvement est obtenue en dérivant l'équation de la vitesse (4.26) par rapport au temps t (Fig. 4.7),

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 C \sin(\omega t + \varphi') = -\omega^2 x(t) \quad (4.27)$$

Il est possible d'observer un mouvement oscillatoire similaire pour un système en rotation. Par exemple, dans le cas du pendule de torsion une barre rigide suspendue à un fil métallique tendu oscille autour de l'axe correspondant au fil. On peut visualiser ces oscillations de faible

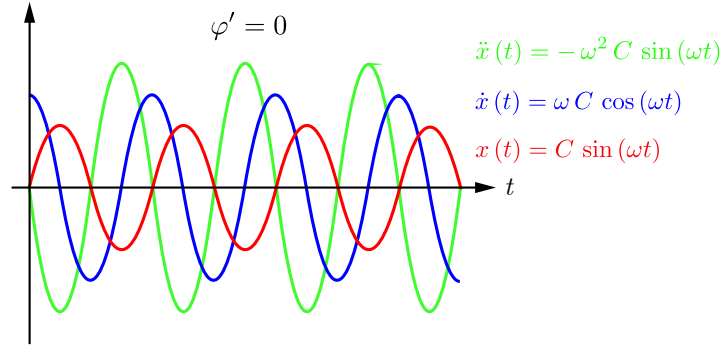
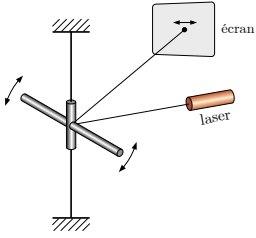


FIGURE 4.7 Graphique de la position $x(t)$, de la vitesse $\dot{x}(t)$ et de l'accélération $\ddot{x}(t)$ d'un mouvement harmonique oscillatoire pour un angle de déphasage $\varphi = 0$. La vitesse est déphasée d'un angle $\pi/2$ par rapport à la position et l'accélération est déphasée d'un angle π par rapport à la position.



Pendule de torsion

amplitude sur le mur de l'auditoire grâce à un faisceau laser réfléchi sur un miroir collé à la barre.

4.1.4 Conditions initiales

Jusqu'à présent, on a établi les formes générales (4.15) ou (4.19) et (4.25) de l'équation horaire d'un oscillateur harmonique. En toute généralité, le mouvement oscillatoire harmonique est déterminé par deux paramètres : les constantes A et B , ou l'amplitude C et l'angle de déphasage φ ou φ' . Il faut deux conditions initiales pour déterminer ces deux paramètres qui donnent lieu à un mouvement spécifique : une sur la position et l'autre sur la vitesse.

Premièrement, on considère un oscillateur harmonique avec une déformation initiale x_0 et une vitesse initiale v_0 . L'équation de la vitesse est obtenue en prenant la dérivée temporelle de l'équation horaire (4.15),

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t) + \omega B \cos(\omega t) \quad (4.28)$$

Les conditions initiales sur la position et la vitesse s'écrivent,

$$x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (4.29)$$

En évaluant l'équation horaire (4.15) au temps initial $t = 0$ compte tenu de la condition initiale (4.29) sur la position, on détermine la constante A ,

$$x(0) = A = x_0 \quad (4.30)$$

En évaluant l'équation de la vitesse (4.28) au temps initial $t = 0$ compte tenu de la condition initiale (4.29) sur la vitesse, on détermine la constante B ,

$$\dot{x}(0) = \omega B = v_0 \quad \text{ainsi} \quad B = \frac{v_0}{\omega} \quad (4.31)$$

En substituant les constantes et dans l'équation horaire générale (4.15), on obtient l'équation horaire particulière,

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad (4.32)$$

Deuxièmement, on considère un oscillateur harmonique avec une déformation initiale x_0 et une vitesse initiale nulle. Les conditions initiales sur la position et la vitesse s'écrivent,

$$x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (4.33)$$

En substituant la condition initiale (4.33) sur la vitesse dans les expressions (4.22) et (4.26) de la vitesse, on en tire les angles de déphasage φ et φ' ,

$$\sin \varphi = \cos \varphi' = 0 \quad \text{ainsi} \quad \varphi = 0 \quad \text{et} \quad \varphi' = \frac{\pi}{2} \quad (4.34)$$

En substituant la condition initiale (4.33) sur la position dans les expressions (4.19) et (4.25)

de la position, compte tenu des expressions des angles de déphasage (4.34), on en tire l'amplitude,

$$C \cos 0 = C \sin \frac{\pi}{2} = x_0 \quad \text{ainsi} \quad C = x_0 \quad (4.35)$$

En substituant les conditions (4.34) et (4.35) dans les expressions (4.19) et (4.25) de la position, on montre que celles-ci sont identiques et s'expriment comme,

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) = x_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.36)$$

4.2 Oscillateur harmonique amorti

L'oscillateur harmonique dont la dynamique est décrite uniquement par une force élastique est un cas idéal. En réalité, la plupart des oscillateurs sont soumis à des forces de frottements dues au milieu extérieur. Les oscillations d'une masse suspendue au bout d'un ressort sont freinées par les frottements de l'air. Si on plonge cette masse dans un récipient rempli d'eau, les forces de frottement jouent un rôle important. On va à présent examiner le modèle physique qui nous permettra de décrire la dynamique d'un oscillateur harmonique en présence de frottements.

La démarche qu'on va adopter est la suivante. La première étape consiste à identifier les forces agissant sur le point matériel. Après avoir établi ce bilan de forces, on peut énoncer la loi du mouvement et la projeter pour obtenir l'équation du mouvement. La description formelle du système physique s'arrête là. On se livrera ensuite à une résolution mathématique de ces équations différentielles du mouvement. On verra que cette équation différentielle relativement simple a des solutions assez complexes. En particulier, il faut considérer trois types d'amortissements qualitativement différents. À l'aide des solutions générales pour ces trois types d'amortissements, on cherchera à déterminer des solutions particulières en tenant compte de conditions initiales identiques. Finalement on illustrera graphiquement ces solutions particulières.

4.2.1 Loi du mouvement oscillatoire harmonique amorti

On considère un point matériel de masse m suffisamment faible pour pouvoir négliger son poids $\mathbf{P}$ par rapport à la force élastique $\mathbf{F}_e$, c'est-à-dire $\mathbf{P} \ll \mathbf{F}_e$. Les forces extérieures $\mathbf{F}^{\text{ext}}$ sont la force élastique $\mathbf{F}_e$ et la force de frottement visqueux $\mathbf{F}_f$ donnée par la loi de Stokes. Par conséquent, la loi du mouvement harmonique oscillatoire amorti (2.32) s'écrit,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_f = m \mathbf{a} \quad (4.37)$$

En substituant la loi de Hooke (4.1) et la loi de Stokes (3.3) dans la loi du mouvement (4.37), celle-ci devient,

$$m \mathbf{a} = -k \mathbf{r} - b \mathbf{v} \quad (4.38)$$

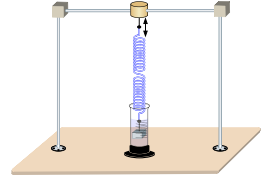
4.2.2 Equation du mouvement harmonique oscillatoire amorti

On considère ici uniquement des mouvements harmoniques oscillatoires amorti rectilignes. On choisit l'axe Ox qui relie le point d'attache du ressort et le point matériel, par projection de la loi vectorielle du mouvement oscillatoire (4.38), on obtient l'équation du mouvement harmonique oscillatoire rectiligne,

$$\text{selon } \hat{x} : \quad m \ddot{x} = -b \dot{x} - k x \quad (4.39)$$

La **pulsation** de ce mouvement oscillatoire harmonique en absence de frottement est définie comme,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.40)$$



Oscillateur amorti



qui est différente de la pulsation ω du mouvement harmonique en présence de frottements. Le facteur d'amortissement γ est défini comme,

$$\gamma = \frac{b}{2m} > 0 \quad \text{ainsi} \quad \gamma = \frac{1}{2\tau} \quad (4.41)$$

Compte tenu des définitions (4.40) et (4.41), l'équation du mouvement (4.39) peut être mise sous la forme,

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4.42)$$

La solution mathématique (4.11) du mouvement d'un oscillateur harmonique sans frottement est une exponentielle imaginaire du type $e^{i\omega t}$. De plus, en présence de frottement visqueux un mouvement est exponentiellement amorti, comme c'est le cas pour le mouvement balistique amorti selon l'axe horizontal qui contient un terme proportionnel à $e^{-t/\tau}$. Par conséquent, l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique amorti (4.38) admet comme solution mathématique un produit des deux solutions mentionnées ci-dessus, c'est-à-dire une exponentielle à argument complexe,

$$x(t) = e^{\lambda t} = e^{(\operatorname{Re}(\lambda) + i \operatorname{Im}(\lambda))t} = e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} e^{i \operatorname{Im}(\lambda)t} \quad (4.43)$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$. En substituant la solution (4.43) on obtient l'équation caractéristique qui doit être satisfaite en tout temps t ,

$$e^{\lambda t} (\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2) = 0 \quad \text{ainsi} \quad \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (4.44)$$

L'équation caractéristique (4.44) du deuxième ordre en λ a deux solutions complexes,

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (4.45)$$

où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. La solution mathématique générale est donc une combinaison linéaire de ces deux solutions particulières,

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (4.46)$$

où les coefficients $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$. Le type d'amortissement d'un mouvement harmonique oscillatoire dépend de l'argument qui se trouve sous la racine carrée des solutions λ_1 et λ_2 . Par conséquent, ce type dépend de la valeur respective de la pulsation ω_0 et du facteur d'amortissement γ . Il existe trois type d'amortissement : un amortissement faible si $\gamma < \omega_0$, un amortissement fort si $\gamma > \omega_0$ et un amortissement critique si $\gamma = \omega_0$.

4.2.3 Amortissement faible

En régime d'amortissement faible, où $\gamma < \omega_0$, la pulsation ω du mouvement harmonique oscillatoire avec frottement est définie comme,

$$\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = i \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} = i\omega \quad (4.47)$$

A l'aide de la définition (4.47), les solutions (4.45) de l'équation caractéristique s'écrivent,

$$\lambda_1 = -\gamma + i\omega \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\gamma - i\omega \quad (4.48)$$

car $\gamma^2 < \omega_0^2$ pour un amortissement faible. A l'aide de ces solutions l'équation horaire (4.46) devient,

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}) \quad (4.49)$$

L'équation horaire $x(t)$ doit être réelle puisqu'elle décrit un mouvement d'oscillation physique. Pour qu'elle soit réelle, il faut que les coefficients A_1 et A_2 soient complexes conjugués, c'est-à-dire $A_1 = A$ et $A_2 = A^*$. Ainsi, compte tenu des solutions (4.48) de l'équation caractéristique, la solution générale (4.49) s'exprime comme,

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A e^{i\omega t} + A^* e^{-i\omega t}) \quad (4.50)$$

En utilisant la formule d'Euler (4.11), la solution générale (4.50) devient,

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left((A + A^*) \cos(\omega t) + (A - A^*) i \sin(\omega t) \right) \quad (4.51)$$

où $A + A^* = 2 \operatorname{Re}(A) \in \mathbb{R}$ et $(A - A^*)i = -2 \operatorname{Im}(A) \in \mathbb{R}$, ce qui montre qu'il s'agit d'une solution réelle. En introduisant le changement de variable suivant,

$$(A + A^*) = C \cos \varphi \quad \text{et} \quad (A - A^*)i = -C \sin \varphi \quad (4.52)$$

la solution générale peut être exprimée comme,

$$x(t) = C e^{-\gamma t} (\cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi) \quad (4.53)$$

En utilisant la formule de trigonométrie,

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi \quad (4.54)$$

la solution générale (4.53) se réduit à,

$$x(t) = C e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.55)$$

ce qui correspond à un mouvement oscillatoire harmonique dont l'amplitude $C e^{-\gamma t}$ est amortie exponentiellement (Fig 4.8).

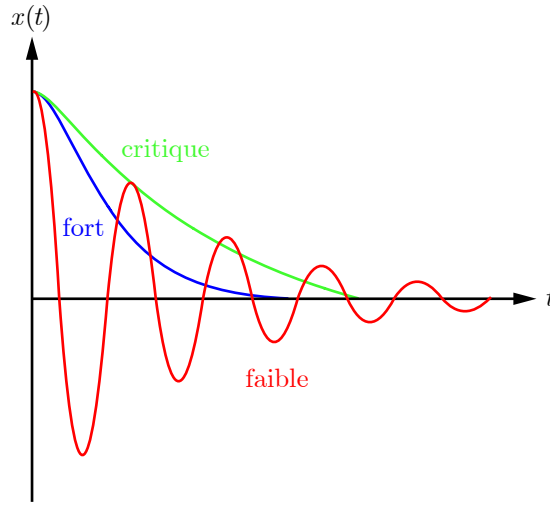
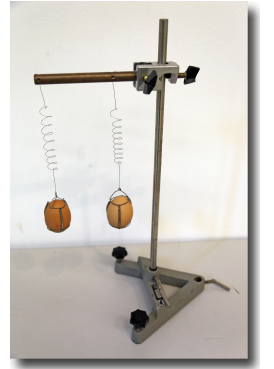


FIGURE 4.8 Solution du mouvement harmonique oscillatoire avec frottement dans le cas d'un amortissement faible, d'un amortissement fort et d'un amortissement critique avec des conditions initiales identiques.

Il est possible d'observer un mouvement oscillatoire amorti faiblement similaire pour un système en rotation. Par exemple, on peut construire un pendule de torsion formé d'un oeuf suspendu à un fil métallique. On considère deux pendules à torsion analogue dont l'un est constitué d'un oeuf cru et l'autre d'un oeuf cuit. Comment peut-on les distinguer ? L'oeuf cru est liquide à l'intérieur et la rotation du liquide génère une force de frottement visqueux interne à l'oeuf qui ralentit son mouvement de rotation oscillatoire. L'oeuf cuit est solide et le frottement visqueux est négligeable. Ainsi, l'oeuf cru est faiblement amorti alors que l'oeuf cuit ne l'est pas.



Oeuf cru et oeuf cuit

4.2.4 Amortissement fort

En régime d'amortissement fort, où $\gamma > \omega_0$, la pulsation ω du mouvement harmonique oscillatoire avec frottement est définie comme,

$$\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} = \omega < \gamma \quad (4.56)$$

A l'aide de la définition (4.60), les solutions (4.45) de l'équation caractéristique s'écrivent,

$$\lambda_1 = -\gamma + \omega \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\gamma - \omega \quad \text{où} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_-^* \quad (4.57)$$

car $\gamma^2 > \omega_0^2$ pour un amortissement fort. L'équation horaire $x(t)$ doit être réelle. Pour qu'elle soit réelle, il faut que les coefficients A_1 et A_2 soient réels. Les temps d'amortissements

caractéristiques τ_1 et τ_2 sont définis comme,

$$\tau_1 = \frac{1}{\gamma - \omega} \quad \text{et} \quad \tau_2 = \frac{1}{\gamma + \omega} \quad \text{où} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+^* \quad (4.58)$$

Ainsi, compte tenu des solutions (4.57) de l'équation caractéristique, la solution générale (4.46) s'exprime comme (Fig. 4.8),

$$x(t) = A_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + A_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad (4.59)$$

Lorsqu'il y a amortissement fort, le frottement est trop important par rapport à l'action de la force élastique et l'oscillateur est amorti avant d'avoir pu osciller.

4.2.5 Amortissement critique

L'amortissement critique est le cas limite des amortissements faible et fort. En régime d'amortissement fort, où $\gamma = \omega_0$, la pulsation ω du mouvement harmonique oscillatoire avec frottement est définie comme,

$$\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma = -\omega_0 \quad (4.60)$$

Pour un amortissement critique, c'est-à-dire $\gamma = \omega_0$, ce qui implique que la pulsation $\omega = 0$ et que $\gamma = 1/\tau_1 = 1/\tau_2$. Ainsi, les solutions générales de l'équations horaire (4.51) et (4.59) impliquent que la solution générale pour un amortissement critique est proportionnelle à $e^{-\omega_0 t}$. Le facteur qui multiplie l'exponentielle $e^{-\omega_0 t}$ doit contenir deux paramètres réels indépendants A et B puisque l'équation du mouvement (4.38) est une équation du deuxième ordre. Le facteur du plus bas ordre en t est une fonction linéaire du temps du type $A + Bt$. Ainsi, la solution générale pour un mouvement harmonique oscillatoire avec amortissement critique est (Fig. 4.8),

$$x(t) = (A + Bt) e^{-\omega_0 t} \quad (4.61)$$

Pour vérifier que l'équation horaire est solution de l'équation du mouvement (4.38) pour un amortissement critique, l'équation horaire (4.61) est dérivée par rapport au temps pour donner l'équation de la vitesse,

$$\dot{x}(t) = (B - \omega_0(A + Bt)) e^{-\omega_0 t} \quad (4.62)$$

L'équation de la vitesse (4.62) est ensuite dérivée par rapport au temps pour donner l'équation du mouvement,

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0(2B - \omega_0(A + Bt)) e^{-\omega_0 t} \quad (4.63)$$

Compte tenu de l'équation horaire (4.61) et de l'équation de la vitesse (4.62), l'équation du mouvement (4.63) peut être mise sous la forme suivante,

$$\ddot{x} + 2\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4.64)$$

qui est l'équation du mouvement harmonique oscillatoire amorti (4.38) en régime d'amortissement critique où $\gamma = \omega_0$. Lorsqu'il y a amortissement critique, le frottement compense l'action de la force élastique et l'oscillateur est amorti au seuil de l'oscillation.

4.2.6 Conditions initiales

On considère un mouvement oscillatoire harmonique amorti spécifique déterminé par les conditions initiales suivantes sur la position et la vitesse,

$$x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (4.65)$$

Amortissement faible

L'équation de la vitesse pour un amortissement faible est obtenue en prenant la dérivée de l'équation horaire (4.55) par rapport au temps,

$$\dot{x}(t) = -C e^{-\gamma t} \left(\gamma \cos(\omega t + \varphi) + \omega \sin(\omega t + \varphi) \right) \quad (4.66)$$

La condition initiale (4.65) sur la vitesse s'écrit,

$$\tan \varphi = -\frac{\gamma}{\omega} \quad \text{ainsi} \quad \varphi = \arctan \left(-\frac{\gamma}{\omega} \right) = -\arctan \left(\frac{\gamma}{\omega} \right) \quad (4.67)$$

La condition initiale (4.65) sur la position s'écrit,

$$x_0 = C \cos \varphi \quad \text{ainsi} \quad C = \frac{x_0}{\cos \left(-\arctan \left(\frac{\gamma}{\omega} \right) \right)} \quad (4.68)$$

L'amplitude est obtenue à l'aide de l'identité trigonométrique,

$$\cos \left(\pm \arctan \frac{\gamma}{\omega} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2}}} \quad \text{ainsi} \quad C = x_0 \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2}} \quad (4.69)$$

Compte tenu de l'angle de déphasage (4.67) et de l'amplitude (4.69), l'équation horaire (4.55) du mouvement harmonique oscillatoire faiblement amorti satisfaisant les conditions initiales (4.65) s'écrit alors explicitement,

$$x(t) = x_0 \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2}} e^{-\gamma t} \cos \left(\omega t - \arctan \left(\frac{\gamma}{\omega} \right) \right) \quad (4.70)$$

Amortissement fort

L'équation de la vitesse pour un amortissement fort est obtenue en prenant la dérivée de l'équation horaire (4.59) par rapport au temps,

$$\dot{x}(t) = -\frac{A_1}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{A_2}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad (4.71)$$

Les conditions initiales (4.65) sur la position et la vitesse s'écrivent,

$$A_1 + A_2 = x_0 \quad \text{et} \quad -\frac{A_1}{\tau_1} - \frac{A_2}{\tau_2} = 0 \quad (4.72)$$

Ainsi, les coefficients A_1 et A_2 sont donnés par,

$$A_1 = \frac{x_0 \tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \quad \text{et} \quad A_2 = -\frac{x_0 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \quad (4.73)$$

L'équation horaire (4.59) du mouvement harmonique oscillatoire fortement amorti satisfaisant les conditions (4.73) s'écrit alors explicitement,

$$x(t) = \frac{x_0}{\tau_1 - \tau_2} \left(\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \quad (4.74)$$

Amortissement critique

L'équation de la vitesse pour un amortissement critique est obtenue en prenant la dérivée de l'équation horaire (4.61) par rapport au temps,

$$\dot{x}(t) = \left(B - \omega_0 (A + B t) \right) e^{-\omega_0 t} \quad (4.75)$$

Les conditions initiales (4.65) sur la position et la vitesse s'écrivent,

$$A = x_0 \quad \text{et} \quad B = A \omega_0 = x_0 \omega_0 \quad (4.76)$$

L'équation horaire (4.61) du mouvement harmonique oscillatoire amorti critique satisfaisant les conditions (4.76) s'écrit alors explicitement,

$$x(t) = x_0 (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} \quad (4.77)$$

4.3 Mouvement circulaire et vitesse angulaire

Un point matériel qui se déplace sur un cercle de rayon constant avec une vitesse scalaire constante suit un **mouvement circulaire uniforme**. Ce mouvement est caractérisé par deux grandeurs qui sont le rayon constant R de la trajectoire circulaire et la **vitesse angulaire** scalaire constante ω , qui a la même la même unité physique – notée $[\text{s}^{-1}]$ – et joue un rôle analogue à celui de la pulsation du mouvement oscillatoire harmonique. Un mouvement circulaire uniforme est aussi caractérisé par une **accélération centripète**, car d’après la 1^{ère} loi de Newton un point matériel suit un mouvement rectiligne uniforme en absence d’accélération.

4.3.1 Abscisse curviligne

Un mouvement circulaire uniforme a lieu sur un cercle qui est une courbe particulière. La distance parcourue par un point matériel P , à partir d’une origine O , le long d’une courbe quelconque est l’**abscisse curviligne** notée $s(t)$ (Fig. 4.9).

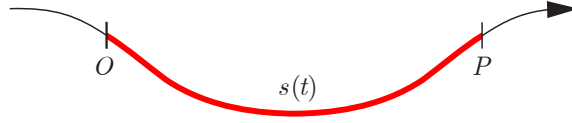


FIGURE 4.9 Abscisse curviligne $s(t)$ d’un point matériel P .

La **vitesse scalaire** $v(t)$ le long de la courbe est définie comme la dérivée de l’abscisse curviligne par rapport au temps,

$$v(t) = \dot{s}(t) \quad (4.78)$$

Il s’agit de la vitesse indiquée par le compteur de vitesse d’un véhicule.

4.3.2 Vitesse angulaire scalaire

L’abscisse curviligne d’un point matériel qui suit un mouvement circulaire uniforme sur un cercle de rayon R constant est donnée par,

$$s(t) = R\phi(t) \quad \text{où} \quad R = \text{cste} \quad (4.79)$$

où ϕ est l’angle de rotation défini positif dans le sens trigonométrique (Fig. 4.10).

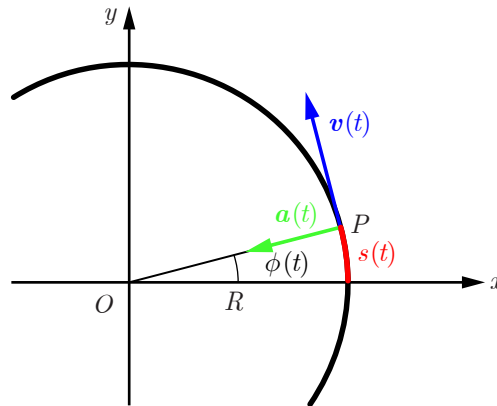


FIGURE 4.10 Mouvement circulaire d’un point matériel P .

Compte tenu de la définition (4.78), la vitesse scalaire s’écrit,

$$v = \dot{s} = R\dot{\phi} \quad (4.80)$$

La **vitesse angulaire scalaire** ω est définie comme la dérivée de la coordonnée angulaire $\phi(t)$ par rapport au temps,

$$\omega = \dot{\phi} \quad (4.81)$$

ainsi,

$$v = R\omega \quad \text{et} \quad \omega = \frac{v}{R} \quad (4.82)$$

Comme la vitesse scalaire v est constante pour un mouvement circulaire uniforme, il faut que la vitesse angulaire scalaire soit également constante,

$$v = \text{cste} \quad \text{ainsi} \quad \omega = \text{cste} \quad (4.83)$$

Compte tenu de la vitesse angulaire scalaire constante (4.81) pour un mouvement circulaire uniforme, la variation infinitésimale de l'angle $\phi(t)$ s'écrit,

$$d\phi(t) = \omega dt \quad (4.84)$$

L'intégrale de l'équation (4.84) par rapport au temps t s'écrit,

$$\int_{\phi(0)}^{\phi(t)} d\phi'(t') = \omega \int_0^t dt' \quad (4.85)$$

Compte tenu de l'angle initial $\phi(0) = \phi_0$, le résultat de l'intégrale (4.85) donne l'angle $\phi(t)$ en fonction de la vitesse angulaire scalaire,

$$\phi(t) = \omega t + \phi_0 \quad (4.86)$$

Au vu de l'abscisse curviligne (4.79), de la vitesse scalaire (4.80) et de l'angle (4.86), l'abscisse curviligne est une fonction linéaire du temps pour un mouvement circulaire uniforme,

$$s(t) = R\omega t + R\phi_0 = vt + s_0 \quad (4.87)$$

où $s_0 = R\phi_0$ est l'abscisse curviligne initial.

4.3.3 Accélération centripète

On considère le mouvement circulaire uniforme de rayon R d'un point matériel P , centré à l'origine O . Ce mouvement a lieu à vitesse angulaire ω constante dans le plan Oxy et le point matériel se déplace dans le sens trigonométrique (Fig. 4.10). On décrit ce mouvement en coordonnées cartésiennes. Le point matériel se trouve initialement sur l'axe Ox . Ainsi, l'angle initial est nul, c'est-à-dire $\phi(0) = \phi_0 = 0$. Par inspection graphique, le vecteur position s'écrit en coordonnées cartésiennes comme,

$$\mathbf{r}(t) = R \cos(\phi(t)) \hat{\mathbf{x}} + R \sin(\phi(t)) \hat{\mathbf{y}} \quad (4.88)$$

Compte tenu de l'équation horaire angulaire (4.86), le vecteur position (4.88) devient,

$$\mathbf{r}(t) = R \cos(\omega t) \hat{\mathbf{x}} + R \sin(\omega t) \hat{\mathbf{y}} \quad (4.89)$$

En projetant le mouvement circulaire uniforme selon les axes cartésiens Ox et Oy , on obtient deux mouvements harmoniques oscillatoires déphasés d'un angle de 90° (Fig. 4.11). Le vecteur vitesse est obtenu en dérivant le vecteur position (4.89) par rapport au temps,

$$\mathbf{v}(t) = -R\omega \sin(\omega t) \hat{\mathbf{x}} + R\omega \cos(\omega t) \hat{\mathbf{y}} \quad (4.90)$$

où la vitesse scalaire $v = R\omega$. Le vecteur accélération est obtenue en dérivant le vecteur vitesse (4.90) par rapport au temps,

$$\mathbf{a}(t) = -R\omega^2 \cos(\omega t) \hat{\mathbf{x}} - R\omega^2 \sin(\omega t) \hat{\mathbf{y}} \quad (4.91)$$

En comparant les vecteurs position (4.89) et accélération (4.91), on en conclut que le vecteur accélération est radial et orienté dans la direction opposée au vecteur position,

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t) \quad (4.92)$$



FIGURE 4.11 On observe sur un mur l'ombre projetée d'un pendule et d'une bille en mouvement circulaire uniforme. On peut ajuster la vitesse angulaire et superposer les deux projections.

Cette accélération dirigée vers le centre est appelée **accélération centripète**. La norme de l'accélération centripète $\mathbf{a}(t)$ est donnée par,

$$a = \|\mathbf{a}(t)\| = \omega^2 \|\mathbf{r}(t)\| = \omega^2 R = \text{cste} \quad (4.93)$$

Ainsi,

$$a = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} \quad (4.94)$$

4.3.4 Vecteur vitesse angulaire

Pour un mouvement circulaire, le **vecteur vitesse angulaire** $\boldsymbol{\omega}$ est orienté selon l'axe de rotation. Pour un mouvement circulaire dans le plan Oxy qui a lieu dans le sens trigonométrique, l'axe de rotation est l'axe Oz qui est normal au plan Oxy . Dans ce cas, le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ est défini positivement selon l'axe Oz ,

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{z}} = \text{cste} \quad \text{où} \quad \omega = \|\boldsymbol{\omega}\| > 0 \quad (4.95)$$

A présent, on établit deux relations vectorielles entre le vecteur position $\mathbf{r}$, le vecteur vitesse $\mathbf{v}$, le vecteur accélération $\mathbf{a}$ et le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ pour le mouvement circulaire mentionné ci-dessus. Le produit vectoriel des vecteurs position (4.89), vitesse angulaire (4.95) s'écrit,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(t) &= R\omega \cos(\omega t) \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}} + R\omega \sin(\omega t) \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}} \\ &= -R\omega \sin(\omega t) \hat{\mathbf{x}} + R\omega \cos(\omega t) \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{v}(t) \end{aligned} \quad (4.96)$$

Compte tenu de la définition (4.90), le vecteur vitesse est,

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(t) \quad (4.97)$$

Le vecteur accélération est la dérivée temporelle du vecteur vitesse (4.97),

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(t)) \quad (4.98)$$

où $\boldsymbol{\omega} = \text{cste}$. Le vecteur vitesse $\mathbf{v}$ est tangentiel à la trajectoire circulaire, car il est orthogonal au vecteur position $\mathbf{r}$ qui est radial. La relation (4.97) s'applique également dans le cas où le vecteur position $\mathbf{r}$ n'est pas orthogonal au vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$. Si le vecteur position $\mathbf{r}$ est colinéaire au vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$, le point matériel se trouve sur l'axe de rotation et il reste immobile lors du mouvement circulaire. Le vecteur accélération $\mathbf{a}$ est colinéaire au vecteur position $\mathbf{r}$, car il est orthogonal aux vecteurs vitesse $\mathbf{v}$ et vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ qui sont orthogonaux au vecteur position $\mathbf{r}$. En effet, en utilisant l'identité vectorielle (1.44), la relation vectorielle (4.98) s'écrit,

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r} = -\omega^2 \mathbf{r} \quad (4.99)$$

car $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} = 0$ et $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = \omega^2$.

4.3.5 Accélération angulaire

Un point matériel qui se déplace sur un cercle de rayon constant avec une accélération tangentielle a_t constante suit un **mouvement circulaire uniformément accéléré**. Ce mouvement est caractérisé par deux grandeurs qui sont le rayon constant R de la trajectoire circulaire et l'**accélération angulaire** scalaire constante α . Le vecteur accélération d'un mouvement circulaire uniformément accéléré a donc deux composantes : l'accélération tangentielle et l'accélération centripète.

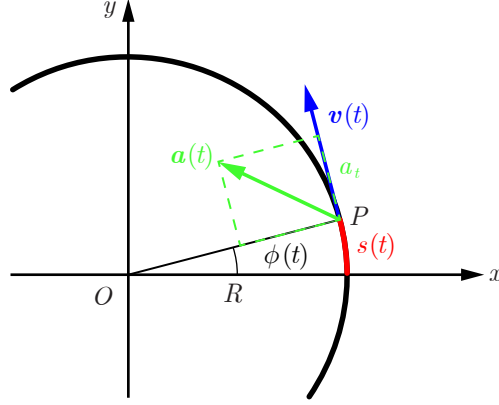


FIGURE 4.12 Mouvement circulaire uniformément accéléré d'un point matériel P .

La vitesse scalaire $v(t)$ est la dérivée de l'abscisse curviligne $s(t)$. Compte tenu de la vitesse scalaire (4.80) et de la vitesse angulaire (4.81), la vitesse scalaire s'écrit,

$$v(t) = \dot{s}(t) = R \dot{\phi}(t) = R \omega(t) \quad (4.100)$$

L'accélération tangentielle a_t constante, qui est colinéaire à la vitesse, est définie comme la dérivée temporelle de la vitesse scalaire $v(t)$ et donc comme la dérivée temporelle seconde de l'abscisse curviligne $s(t)$,

$$a_t = \dot{v} = R \dot{\omega} \quad \text{ainsi} \quad a_t = \ddot{s} = R \ddot{\phi} \quad (4.101)$$

L'accélération angulaire scalaire α constante est définie comme la dérivée temporelle de la vitesse angulaire scalaire $\omega(t)$ et donc comme la dérivée temporelle seconde de l'angle $\phi(t)$,

$$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\phi} = \text{cste} \quad (4.102)$$

L'accélération tangentielle (4.101) et l'accélération angulaire scalaire (4.102) sont liés par les relations,

$$a_t = R \alpha \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{a_t}{R} \quad (4.103)$$

Comme l'accélération tangentielle a_t est constante pour un mouvement circulaire uniformément accéléré, il faut que l'accélération angulaire scalaire soit également constante,

$$a_t = \text{cste} \quad \text{ainsi} \quad \alpha = \text{cste} \quad (4.104)$$

Compte tenu de l'accélération tangentielle constante (4.81) pour un mouvement circulaire uniformément accéléré, la variation infinitésimale de la vitesse angulaire scalaire $\omega(t)$ s'écrit,

$$d\omega(t) = \alpha dt \quad (4.105)$$

L'intégrale de l'équation (4.105) par rapport au temps t s'écrit,

$$\int_{\omega(0)}^{\omega(t)} d\omega'(t') = \alpha \int_0^t dt' \quad (4.106)$$

Compte tenu la vitesse angulaire scalaire initiale $\omega(0) = \omega_0$, le résultat de l'intégrale (4.106) donne la vitesse angulaire scalaire $\omega(t)$ en fonction de l'accélération tangentielle,

$$\omega(t) = \alpha t + \omega_0 \quad (4.107)$$

Au vu de la vitesse scalaire (4.100), de l'accélération tangentielle (4.80) et de la vitesse angulaire (4.86), la vitesse scalaire est une fonction linéaire du temps pour un mouvement circulaire uniformément accéléré,

$$v(t) = R\alpha t + R\omega_0 = a_t t + v_0 \quad (4.108)$$

où $v_0 = R\omega_0$ est la vitesse scalaire initiale. En comparant les expressions (4.81) et (4.107) de la vitesse angulaire scalaire $\omega(t)$, on obtient,

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \alpha t + \omega_0 \quad (4.109)$$

Ainsi, la variation infinitésimale de l'angle $\phi(t)$ s'écrit,

$$d\phi(t) = \alpha t dt + \omega_0 dt \quad (4.110)$$

L'intégrale de l'équation (4.110) par rapport au temps t s'écrit,

$$\int_{\phi(0)}^{\phi(t)} d\phi'(t') = \alpha \int_0^t t' dt' + \omega_0 \int_0^t dt' \quad (4.111)$$

Compte tenu l'angle initial $\phi(0) = \phi_0$, le résultat de l'intégrale (4.111) donne l'angle $\phi(t)$ en fonction de l'accélération angulaire α ,

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \omega_0 t + \phi_0 \quad (4.112)$$

L'abscisse curviligne initial (4.79) s'écrit en terme de l'angle initiale comme,

$$s_0 = R\phi_0 \quad (4.113)$$

La vitesse scalaire initiale (4.100) s'écrit en terme de la vitesse angulaire initiale comme,

$$v_0 = R\omega_0 \quad (4.114)$$

Au vu de l'abscisse curviligne (4.79), de l'équation horaire angulaire (4.112), de l'accélération tangentielle (4.103) de la vitesse scalaire initiale (4.114) et de l'abscisse curviligne initial (4.113), l'abscisse curviligne est une fonction quadratique du temps pour un mouvement circulaire uniformément accéléré,

$$s(t) = \frac{1}{2} R\alpha t^2 + R\omega_0 t + R\phi_0 = \frac{1}{2} a_t t^2 + v_0 t + s_0 \quad (4.115)$$